(B) METRICKÉ VLASTNOSTI

1. Odchylka přímek

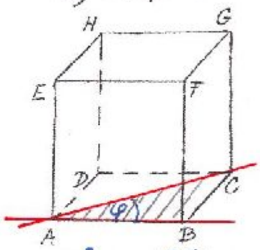
ODCHYLKA DVOU PŘÍMEK p, q – zn. $\varphi = |\sphericalangle pq|$

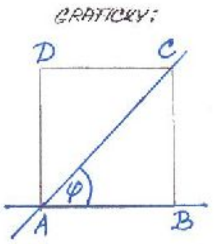
- **RŮZNOBĚŽNÝCH**: velikost každého z ostrých nebo pravých úhlů, které přímky spolu svírají $0° < \varphi \leqq 90°$
- **ROVNOBĚŽNÝCH**: $\varphi = 0°$ (0 rad)
- **MIMOBĚŽNÝCH**: odchylka různoběžných přímek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně s danými mimoběžkami

Příklady

① Urči odchylku přímek

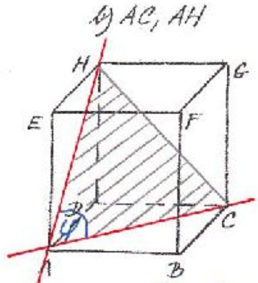
a) AB, AC

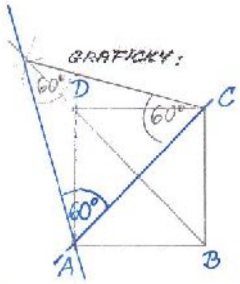




různoběžky
$\varphi = 45°$

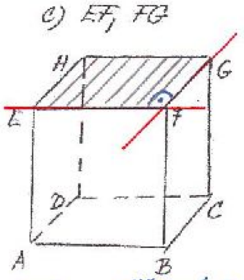
b) AC, AH





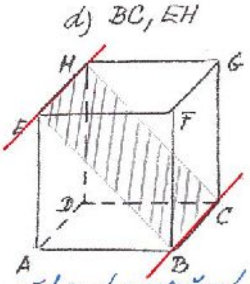
různoběžky $\varphi = 60°$ (ΔACH rovnostranný)

c) EF, FG



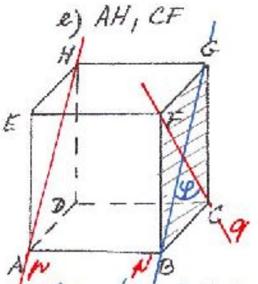
různoběžky - kolmé
$\varphi = 90°$

d) BC, EH

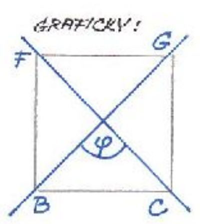


žádný společný bod - leží v 1 rovině => rovnoběžky $\varphi = 0°$

e) AH, CF

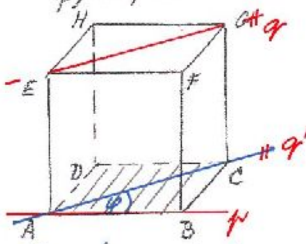


žádný společ. bod - neleží v 1 rovině => mimoběžky



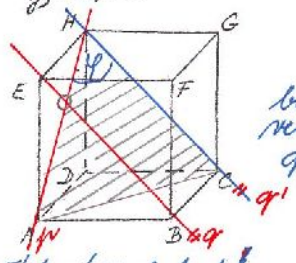
bodem B vedeme $p' \parallel p \Rightarrow \varphi = |\sphericalangle p'q|$
$\varphi = 90°$

f) AB, EG



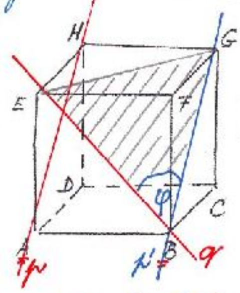
žádný spol. bod, v růz. rovinách => mimoběžky
$\varphi = |p q'| = 45°$

g) AH, BE



bodem H vedeme $q' \parallel q$

žádný spol. bod!, neleží v 1 rovině => mimoběžky



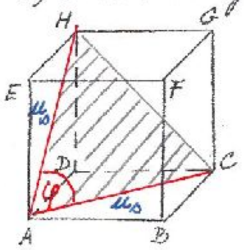
ΔBGE rovnostranný

bodem B vedeme $p' \parallel p$

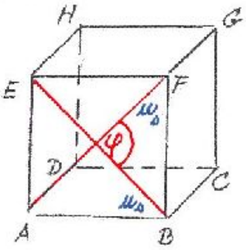
$\varphi = |\sphericalangle pq| = 60°$

(B) Urči v krychli s hranou $a = 4\,cm$ odchylku

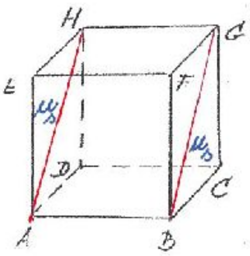
3.2. a) dvou stěnových úhlopříček



$\varphi = 60°$
(Δ ACH rovnostr.)

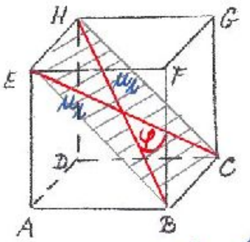


$\varphi = 90°$
(úhlopř. čtverce na sebe $\perp$)

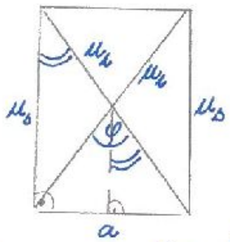


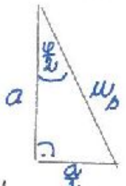
$\varphi = 0°$
(rovnoběžky)

b) dvou tělesových úhlopříček



BCEH obdélník





(u_s) v R Δ ABE

$u_s^2 = a^2 + a^2$

$u_s^2 = 2a^2$

$u_s = a\sqrt{2}$

(u_t) v R Δ BHD

$u_t^2 = a^2 + u_s^2$

$u_t^2 = a^2 + 2a^2$

$u_t^2 = 3a^2$

$u_t = a\sqrt{3}$

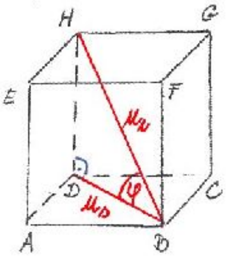
$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{u_s} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

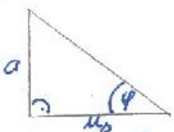
$$\frac{\varphi}{2} = 35°16'$$

$$\varphi = 70°32'$$

c) tělesové a stěnové úhlopříčky



v Δ BDH:



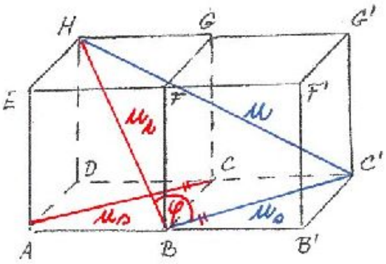
$u_s^2 = a^2 + a^2$

$u_s^2 = 2a^2$

$u_s = a\sqrt{2}$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{u_s}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 35°16'$$



$u_s^2 = a^2 + a^2$

$u_s^2 = 2a^2$

$u_s = a\sqrt{2}$

$u_t^2 = a^2 + u_s^2$

$u_t^2 = a^2 + 2a^2$

$u_t^2 = 3a^2$

$u_t = a\sqrt{3}$

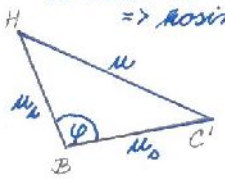
$|HC'| = u$

$u^2 = u_s^2 + u_t^2$

$u^2 = 2a^2 + 3a^2$

$u^2 = 5a^2$

Δ HBC': známe 3 strany obec. Δ (sss)
=> kosinová věta



$$u^2 = u_s^2 + u_t^2 - 2u_s u_t \cos\varphi$$

$$2u_s u_t \cos\varphi = u_s^2 + u_t^2 - u^2$$

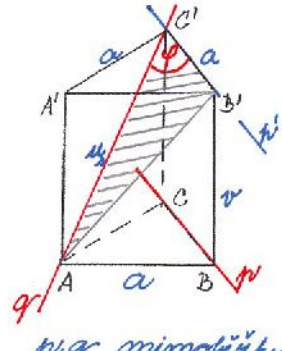
$$\cos\varphi = \frac{u_s^2 + u_t^2 - u^2}{2u_s u_t}$$

$$\cos\varphi = \frac{2a^2 + 3a^2 - 5a^2}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3}}$$

$$\cos\varphi = \frac{0}{2a^2\sqrt{6}} = 0$$

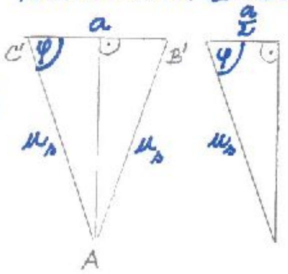
$$\Rightarrow \varphi = 0°$$

③ Urči odchylku přímek $p = \leftrightarrow BC$, $q = \leftrightarrow AC'$ v pravidelném trojbokém hranolu $ABCA'B'C'$,
2R/60 kde $|AB| = a = 4$ cm, $|AA'| = v = 5$ cm.



p, q mimoběžky

z rovnoram. $\Delta AB'C'$



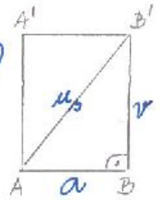
$$\cos\varphi = \frac{\frac{a}{2}}{u_s} \rightsquigarrow u_s$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{2u_s}$$

$$\cos\varphi = \frac{4}{2 \cdot 6{,}9}$$

$$\cos\varphi = 0{,}3125$$

$$\varphi \doteq 71{,}79° \doteq 71°47'$$



Pyth. věta

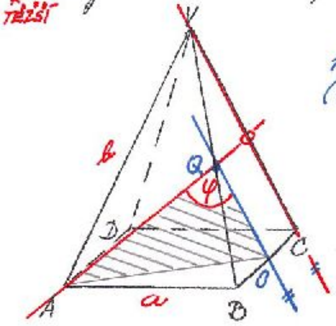
$$u_s^2 = a^2 + v^2$$

$$u_s = \sqrt{16+25}\ \text{cm}$$

$$u_s = \sqrt{41}\ \text{cm}$$

$$u_s \doteq 6{,}9\ \text{cm}$$

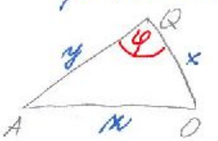
④ Urči odchylku přímek CV a AQ (Q střed BV) v pravidelném čtyřbokém
3R/60 jehlanu $ABCDV$, kde $|AB| = a = 5$ cm, $|AV| = b = 6$ cm.
*TĚŽŠÍ



p, q mimoběžky
(žádný spol. bod, neleží v jedné rovině)

φ z ΔAOQ (obecný)

$\varphi = |\sphericalangle AQO|$



musíme určit délky stran (*)
=> Δ bude určen podle sss - využ. kosinovou větu

- ozn. $|AO| = z$, $|AQ| = y$, $|OQ| = x$

$$z^2 = y^2 + x^2 - 2xy\cos\varphi$$

$$[|AO|^2 = |AQ|^2 + |OQ|^2 - 2|AQ|\cdot|OQ|\cos\varphi]$$

$$2xy\cos\varphi = y^2 + x^2 - z^2$$

$$\cos\varphi = \frac{y^2+x^2-z^2}{2xy}$$

$$\cos\varphi = \frac{4{,}64^2+3^2-5{,}6^2}{2\cdot 4{,}64\cdot 3}$$

$$\cos\varphi = -0{,}0298$$

kalkulačka

$$\varphi = 91°42'$$

ALE ODCHYLKA PŘÍMEK je menší z úhlů (ostrý)

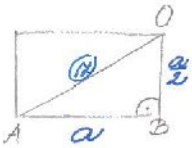
$$\Rightarrow \varphi' = 180° - \varphi$$

$$\varphi' = 180° - 91°42'$$

$$\varphi' = 88°18'$$

(*) URČENÍ STRAN Δ AOQ

AO z PΔ ABO



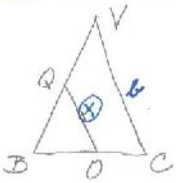
$$z^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$z^2 = 25 + 6{,}25$$

$$z \doteq 5{,}6\ \text{cm}$$

$$[|AO| \doteq 5{,}6\ \text{cm}]$$

OQ z Δ BCV: OQ střední příčka



$$x = \frac{1}{2}b$$

$$[|OQ| = \tfrac{1}{2}|CV|]$$

$$x = 3\ \text{cm}$$

$$[|OQ| = 3\ \text{cm}]$$

AQ z obec. Δ ABQ

určíme β => Δ určen podle sus => využ. kosin. větu

$$y^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2a\left(\frac{b}{2}\right)\cos\beta$$

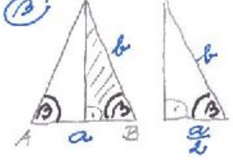
$$y^2 = 5^2 + 3^2 - 2\cdot 5\cdot 3\ \underbrace{\cos 65°22'}_{\frac{5}{12}}$$

$$y^2 = 21{,}5$$

$$y \doteq 4{,}64\ \text{cm}$$

$$[|AQ| = 4{,}64\ \text{cm}]$$

β



$$\cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{b}$$

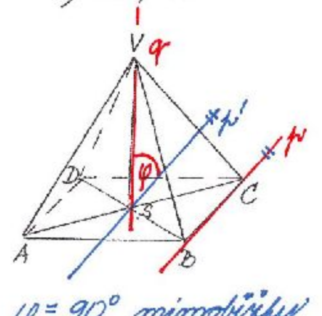
$$\cos\beta = \frac{a}{2b}$$

$$\cos\beta = \frac{5}{12}$$

3.3 DÚ

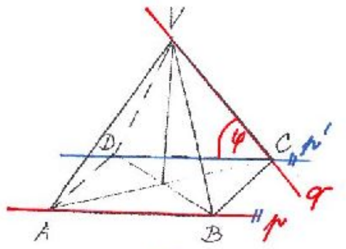
⑤ Dán pravidelný čtyřboký jehlan, stěny rovnostranné Δ, S střed podstavy, P střed AV. Urči odchylku přímek, je-li délka hran 4 cm

a) BC, SV



$\varphi = 90°$ mimoběžky

b) AB, CV

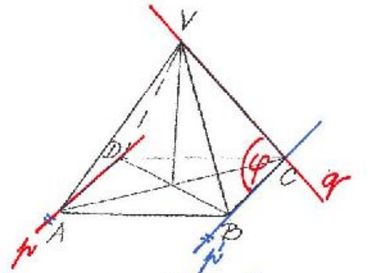


mimoběžky

Δ CDV rovnostranný

$\varphi = 60°$

c) AD, CV



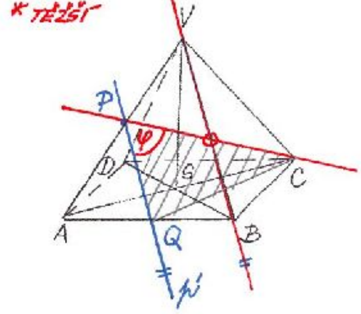
mimoběžky

Δ BCV rovnostranný

$\varphi = 60°$

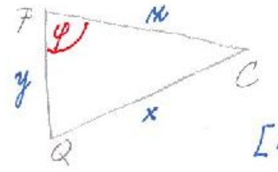
d) BV, CP

ŠK * TĚŽŠÍ



φ v Δ PQC – obecný => musíme určit délky stran

$|QC| = x$, $|PQ| = y$, $|CP| = z$ viz (*)



=> pro urč. φ využ. kosin. větu

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\varphi$$

$$[|QC|^2 = |PQ|^2 + |CP|^2 - 2|PQ|\cdot|CP|\cos\varphi]$$

$$2yz\cos\varphi = y^2 + z^2 - x^2$$

$$\cos\varphi = \frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}$$

$$\cos\varphi = \frac{4+20-20}{2\cdot 2\cdot 2\sqrt5} = \frac{4}{8\sqrt5}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2\sqrt5}\cdot\frac{\sqrt5}{\sqrt5} = \frac{\sqrt5}{10}$$

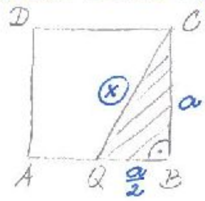
$$\cos\varphi \doteq 0{,}2236$$

$$\varphi \doteq 77{,}079°$$

$$\varphi \doteq 77°05'$$

(*) URČENÍ DÉLEK x, y, z

QC



v R Δ QCB

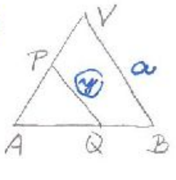
$$x^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$x = \sqrt{16+4}$$

$$x = \sqrt{20} = 2\sqrt5$$

PQ

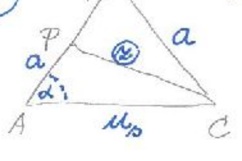


PQ střední příčka

$|PQ| = y = \frac{a}{2}$

$y = 2$ cm

CP



Δ rovnoramenný – určíme α

=> určen podle sus => kosin. v.

$$z^2 = u_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2u_s\frac{a}{2}\cos\alpha$$

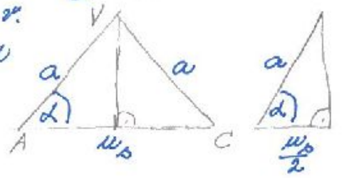
$$z^2 = 4^2\cdot 2 + 2^2 - 4\sqrt2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt2}{2}$$

$$z^2 = 32 + 4 - 16$$

$$z^2 = 20$$

$$z = 2\sqrt5$$

α v rovnoram. Δ ACV



$$\cos\alpha = \frac{\frac{u_s}{2}}{a}$$

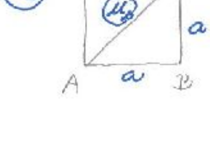
$$\cos\alpha = \frac{u_s}{2a}$$

$$\cos\alpha = \frac{a\sqrt2}{2a}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt2}{2}$$

$$\alpha = 45°$$

u_s



$$u_s^2 = a^2 + a^2$$

$$u_s^2 = 2a^2$$

$$u_s = a\sqrt2$$

$$u_s = 4\sqrt2$$